مجموعه کتاب‌های جی‌بی

آمار و احتمال

• حسین هاشمی طاهری
• تیمور جویبار

«تقدیم به

نوه‌های عزیزم هانا و هامون

حسین هاشمی طاهری»

.

.

.

«تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تیمور جویبار»

مقدمه ناشر

یکی از پارادوکس‌های جالبِ احتمال، مسئلهٔ مونتی‌هاله (Monty Hall problem). این مسئله مربوط به یک مسابقهٔ تلویزیونی میشه که توی اون سه‌تا در وجود داره که پشت یکی از اون‌ها یک جایزه (یک خودرو) قرار داره و دوتا در دیگه پوچ هستن. شرکت‌کننده برای بردن خودروی مورد نظر باید یکی از درها رو انتخاب کنه. مجری (که خودش میدونه خودرو پشت کدوم در قرار داره) یکی از درهای دیگه رو باز میکنه و نشون میده که پوچه. حالا به شرکت‌کننده میگه حاضری دری که انتخاب کردی رو با در باقی‌مونده عوض کنی؟

اگر جای اون شرکت‌کننده بودید نظرتون رو تغییر می‌دادید؟! یا نه؟! یا به انتخابتون اصرار می‌ورزیدید؟

شاید در نگاه اول اون دوتا در، هیچ تفاوتی با هم نداشته باشن. ولی علم آمار و احتمال جواب دقیق‌تری برای این مسئله داره و نشون میده که اگر شرکت‌کننده در رو عوض کنه احتمال برنده‌شدنش بیشتر میشه![1]

حالا چرا اینا رو گفتیم؟! اینا رو گفتیم که بدونید اگر کتاب جیبی آمار و احتمال خیلی‌سبز رو بخونید (علاوه بر این‌که می‌تونید مثل آب‌خوردن تست بزنید) می‌تونید تو مسابقه‌ها شرکت کنید و میلیاردر بشید

۱- اگر هنوز متقاعد نشدید می‌تونید عبارت «مسئلهٔ مونتی‌هال» یا «پارادوکس مونتی‌هال» رو توی اینترنت جست‌وجو کنید.

مقدمه مؤلفان

به نام خدا

درس آمار و احتمال از اون درساییه که درکش خیلی ساده و روونه و تو ذهن می‌مونه. حالا ما اومدیم این درسو خلاصه کردیم طوری که هیچ مطلبی جا نمونه و تازه اون مطلبُ بازشم کردیم و مشخصات زیر رو داره:

۱ درس‌نامه‌اش کامل و کافیه و هر چی تو کتاب درسی هستش، تو این کتاب کامل‌ترش هست.

۲ بعد از هر موضوع درسی، مثال و تست مربوط به اون موضوع رو جلو روتون گذاشتیم تا درک اونو ساده کنه.

۳ در آخر هر فصل، آزمونی شامل ۱۰ پرسش تستی گذاشتیم تا خودآزمایی کنین.

چیز دیگه‌ای هم مونده که نگفته باشیم؟

هاشمی طاهری ـ جویبار

فهرست

درس ۲

جبر مجموعه ها

مجموعه، یکی از مفاهیم تعریف نشده است که فقط از آن یک برداشت ذهنی داریم ولی در قالب کلمات نمی‌توان آن را بیان نمود. فرض کنید فردی بگوید «مجموعه، دسته‌ای از اشیاء است که ...» بعد می‌پرسیم «دستهٔ اشیاء» به چه معنی است؟ در پاسخ بگوید «دستهٔ اشیاء» به معنی «گروهی از اشیاء» است. باز می‌پرسیم «گروهی از اشیاء» به چه معنی است و شاید در جواب بگوید «توده‌ای از اشیاء». ما هم می‌گوییم «توده‌ای از اشیاء» یعنی چه و ... و سرانجام در جواب می‌گوید یعنی «مجموعه‌ای از اشیاء» در این‌جاست که از مجموعه به مجموعه رسیدیم. اصطلاحاً می‌گوییم در یک دور باطل گرفتار شده‌ایم، پس مجموعه را همانند نقطه، خط و ... یکی از عبارت‌های تعریف نشده در نظر می‌گیریم. مجموعه را با حروف بزرگ مانند A، B و ..... نمایش می‌دهیم.
به عنوان مثال؛ مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸\}$. اگر بخواهیم این مجموعه را به صورت ریاضی تعریف کنیم، یکی از روش‌های آن به صورت $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x=۲k, x<۹, k\in\mathbb{Z}\}$ است.

تذکر اگر در مجموعه‌ای یک عضو چند بار تکرار شود، آن عضو را فقط یک بار می‌نویسیم، مثلاً $\{۱,۲,۳\}=\{۱,۲,۲,۳,۳,۳,۲\}$.

نکته
مجموعه باید کاملاً واضح و یکتا باشد. مثلاً عبارت «چهار عدد زوج متوالی» نمی‌تواند معرف یک مجموعه باشد، زیرا $\{۲,۴,۶,۸\}$ و $\{۶,۸,۱۰,۱۲\}$ هر دو مجموعهٔ چهار عدد زوج متوالی هستند ولی این دو مجموعه یکسان نیستند.

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد، مجموعهٔ تهی می‌نامند. مثلاً عبارت «اعداد طبیعی که بین $\frac{۱}{۳}$ تا $\frac{۳}{۴}$ قرار دارند»، مجموعه‌ای تهی است. مجموعهٔ تهی را با نماد $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

عضویت: اگر عنصری مانند a در مجموعهٔ A باشد، اصطلاحاً می‌گوییم «a عضو A است» و آن را با نماد $a \in A$ نمایش می‌دهیم. اگر a در مجموعهٔ A وجود نداشته باشد، آن را با نماد $a \notin A$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ مرجع (مجموعهٔ جهانی): در هر بحثی، عضوهای مجموعه‌ای که درباره‌اش بحث می‌کنیم درون مجموعه‌ای کلی قرار دارند، آن مجموعهٔ کلی را مجموعهٔ مرجع می‌نامند و با U نمایش می‌دهند.

مثلاً وقتی می‌گوییم «مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس یازدهم دبیرستان فیروز بهرام» در واقع قسمتی از دانش‌آموزان استان تهران را در نظر گرفته‌ایم، پس مجموعهٔ مرجع در این بحث می‌تواند «دانش‌آموزان استان تهران باشد». هر چند مجموعهٔ مرجع می‌تواند «دانش‌آموزان ایران» نیز باشد.

زیرمجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، اگر **تمام** عضوهای A در مجموعهٔ B نیز وجود داشته باشند، آن‌گاه می‌گوییم «A زیرمجموعهٔ B است» و آن را با نماد $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ریاضی زیرمجموعه بودن: با توجه به تعریف فوق، هم‌ارزی مقابل برقرار است:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x : x \in A \;\Rightarrow\; x \in B)$$

تعریف زیرمجموعه نبودن: اگر عضوی در A وجود داشته باشد که آن عضو در B نباشد، می‌گوییم «A زیرمجموعهٔ B نیست» و آن را با نماد $A \not\subseteq B$ نمایش می‌دهیم. به زبان ریاضی داریم:

$$A \not\subseteq B \equiv (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$$

مثال

الف) ثابت کنید تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

ب) ثابت کنید هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع است.

پاسخ **الف)** می‌خواهیم ثابت کنیم $\varnothing \subseteq A$.

می‌دانیم عبارت $\varnothing \subseteq A$ معادل است با $\forall x : x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ است و این گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم، درست است، زیرا مقدمِ این شرط؛ یعنی $x \in \varnothing$ نادرست است، در نتیجه $\varnothing \subseteq A$.

ب) می‌خواهیم ثابت کنیم اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $A \subseteq U$ است. برای اثبات این رابطه، به روش برهان خلف عمل می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم؛ $A \not\subseteq U$. پس باید عضوی در A باشد که در U وجود نداشته باشد. این با تعریف مجموعهٔ مرجع در تناقض است، زیرا همهٔ عضوهای یک مجموعه باید در مجموعهٔ مرجع باشند، پس فرض خلف باطل است و در نتیجه $A \subseteq U$.

متمم یک مجموعه

اگر A مجموعه‌ای دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد، آن‌گاه مجموعهٔ تمام عضوهای U که در A نباشند، مجموعهٔ متمم A می‌نامند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

بیان ریاضی مجموعهٔ متمم:

$$\forall x \in A' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A$$

یا به بیان ساده‌تر:

$$\forall x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

دو مجموعهٔ مساوی: دو مجموعهٔ A و B را مساوی گویند، هرگاه هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری باشد؛ به بیان ریاضی داریم:

$$(A = B) \equiv (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ متناهی

اگر A مجموعه‌ای متناهی و شامل n عضو باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^n است، زیرا هر زیرمجموعه در مقایسه با عضوی دلخواه از A، دو حالت دارد یا آن عضو در زیرمجموعه هست یا نیست. پس بنابر اصل شمارش، تعداد زیرمجموعه‌ها $\underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n\ \text{مرتبه}}=۲^n$ می‌باشد.

◄ **مجموعهٔ توانی یک مجموعه:** مجموعه‌ای را که شامل تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد مجموعهٔ توانی می‌نامند. مجموعهٔ توانی نظیر مجموعهٔ A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آن‌گاه $P(A)$ دارای ۲^n عضو و دارای $۲^{۲^n}$ زیرمجموعه است.

تست

مجموعهٔ توانی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,\{۲\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶۴

۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

پاسخ | گزینهٔ ۴ مجموعهٔ A سه عضوی است (توجه کنید که ۲ با $\{۲\}$ مساوی نیست)، پس مجموعهٔ A دارای $۸=۲^۳$ زیرمجموعه می‌باشد. اگر تمام این زیرمجموعه‌ها را در یک مجموعه بگذاریم، آن‌گاه مجموعهٔ توانی A به دست می‌آید که شامل ۸ عضو است، در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعهٔ توانی برابر $۲^۸$؛ یعنی ۲۵۶ است.

◄ **زیرمجموعهٔ محض یک مجموعه:** اگر $A\subseteq B$ و $A\neq B$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم مجموعهٔ A، زیرمجموعهٔ محضِ مجموعهٔ B است. گاهی زیرمجموعهٔ محض را زیرمجموعهٔ «سره» نیز می‌نامند. اگر مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های محض آن $۲^n-۱$ است.

تست

اگر به مجموعه‌ای n عضوی، ۲ عضو اضافه شود، آن‌گاه به تعداد زیرمجموعه‌های محض آن ۴۸ عضو اضافه می‌شود، n کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۳   ۴) ۲

پاسخ | **گزینهٔ ۱** تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ n عضوی، $۲^n - ۱$، و تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ $(n+۲)$ عضوی $۲^{n+۲} - ۱$ است، پس داریم:

$$(۲^{n+۲} - \cancel{۱}) - (۲^n - \cancel{۱}) = ۴۸ \Rightarrow ۲^۲ \times ۲^n - ۲^n = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۳ \times ۲^n = ۴۸ \Rightarrow ۲^n = ۱۶ \Rightarrow ۲^n = ۲^۴ \Rightarrow n = ۴$$

این مسئله را با عددگذاری نیز می‌توان حل نمود!

تست

مجموعهٔ $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge ۲^n \le ۳n \le ۲^{n+۱}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۴   ۲) ۸   ۳) ۱۶   ۴) ۳۲

پاسخ | **گزینهٔ ۲** واضح است که n می‌تواند ۱ باشد، زیرا:

$n = ۱ \Rightarrow ۲^۱ \le ۳ \times ۱ \le ۲^{۱+۱} \Rightarrow ۲ \le ۳ \le ۴$ درست

n می‌تواند ۲ یا ۳ نیز باشد، زیرا:

$$n = ۲ \Rightarrow ۲^۲ \le ۳ \times ۲ \le ۲^{۲+۱} \Rightarrow ۴ \le ۶ \le ۸$$

$$n = ۳ \Rightarrow ۲^۳ \le ۳ \times ۳ \le ۲^{۳+۱} \Rightarrow ۸ \le ۹ \le ۱۶$$

اما n نمی‌تواند ۴ یا بزرگ‌تر از ۴ باشد، زیرا به عنوان مثال؛ اگر $n = ۴$ باشد، آن‌گاه $۲^۴ \le ۳ \times ۴$ درست نیست.

پس مجموعهٔ A، دارای ۳ عضو است و در نتیجه $۲^۳ = ۸$ زیرمجموعه دارد.

تست

اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲\},\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\}$ و $B=\{\{۱\},\{۱,۲\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A\cap B'$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

پاسخ | گزینهٔ ۳

$$A\cap B'=A-B=\{۱,۲,\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲\}\}$$

چون $A\cap B'$ دارای ۴ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^۴=۱۶$ می‌باشد.

تست

مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B\cup A')'$، کدام است؟ (سراسری خارج ریاضی)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

پاسخ | گزینهٔ ۴

یک مجموعهٔ nعضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است، پس اگر تعداد عضوهای A، برابر n باشد، داریم:

$$۲^n=۵۱۲=۲^۹ \Rightarrow n=۹ \Rightarrow n(A)=۹$$

از طرفی $n(A\cap B)=۳$ است، پس:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۹-۳=۶$$

و همچنین داریم:

$$(B\cup A')'=B'\cap A \Rightarrow n(B\cup A')'=n(A\cap B')=n(A-B)=۶$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های $(B\cup A')'$ برابر $۲^۶=۶۴$ است.

عطفی $(x \in A \wedge y \in \varnothing)$، نادرست است، یعنی تالی شرط نادرست است و در نتیجه ترکیب شرطی فوق نادرست می‌باشد، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین، فرض خلف باطل است و در نتیجه $A \times \varnothing = \varnothing$، به دلیل مشابه ثابت می‌شود $\varnothing \times A = \varnothing$.

ب) چون A و B ناتهی هستند، پس $A \times B$ شامل عضو است و تهی نمی‌باشند. اگر (x,y) عضوی دلخواه از $A \times B$ باشد، چون $A \times B = B \times A$: پس آن عضو در $B \times A$ نیز هست و برعکس.

$$\forall (x,y) \in A \times B \iff (x,y) \in B \times A$$

از رابطهٔ بالا داریم:

$$\forall x \in A \wedge \forall y \in B \iff x \in B \wedge y \in A$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B \\ \forall y \in B \Rightarrow y \in A \Rightarrow B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

پرسش های تستی

۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - \frac{۳}{۲}| \leq \frac{۵}{۲}\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $\exists x \in A : x + ۵ = ۳$

۲) $\forall x \in A : x + ۴ < ۸$

۳) $\exists x \in A : \frac{۱}{x} \in \mathbb{Z}$

۴) $\forall x \in A : x^۲ > ۰$

۲- نقیض گزارهٔ $(\forall x \in \mathbb{Q} ; x^۲ \geq x) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} ; x^۲ = -۱)$ کدام است؟

۱) $(\forall x \in \mathbb{Q} : x^۲ < x) \vee (\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ \neq -۱)$

۲) $(\exists x \in \mathbb{Q} : x^۲ < x) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ \neq -۱)$

۳) $(\exists x \in \mathbb{Q} : x^۲ \geq x) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ = -۱)$

۴) $(\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ < x) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ \neq -۱)$

۳- گزارهٔ $(r \Rightarrow q\sim) \Rightarrow p\sim$ هم‌ارز با کدام گزینه است؟

۱) $(p \vee q) \vee r$
۲) $(p \vee q) \wedge r$
۳) $(p \vee \sim q) \vee r$
۴) $(p \wedge q) \vee p$

۴- کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ است؟ (سراسری ریاضی)

۱) p
۲) $p \vee q$
۳) q
۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

۵- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ و $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$، آن‌گاه چند مجموعهٔ متمایز می‌توانند به جای X قرار گیرند؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۶- اگر $A \cup (B-A)=B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A \subseteq B$
۲) $B \subseteq A$
۳) $A \neq \varnothing$
۴) $B=\varnothing$

۷- اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند، آن‌گاه $(A \cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟ (سراسری خارج ریاضی)

۱) B'
۲) $\varnothing$
۳) $A \cap B$
۴) $A-B$

۸- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n=(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$، آن‌گاه حاصل $\bigcup\limits_{i=۱}^{n} A_i$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)-\{۰\}$
۲) $(-۱,۱)$
۳) $\{۱,-۱\}$
۴) $\{۰\}$

۹- مجموعهٔ $A \times B$ دارای ۵۴ عضو و مجموعهٔ $A \cap B$ دارای ۸ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $A \cup B$ چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۱۰- اگر $A=[۱,۳]$ و $B=[-۱,۲]$، آن‌گاه مساحت $A \times B - B \times A$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۳» ابتدا عضوهای مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$$|x-\frac{۳}{۲}|\le\frac{۵}{۲} \Rightarrow -\frac{۵}{۲}\le x-\frac{۳}{۲}\le\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow -۱\le x\le ۴ \Rightarrow A=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

با توجه به عضوهای مجموعهٔ A، هرگز $x+۵=۳$ نمی‌شود، پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگر $x=۴$، آن‌گاه $x+۴=۸\not<۸$ پس گزینهٔ (۲) نیز نادرست است و اگر $x=۰$، آن‌گاه $x^۲\not>۰$، پس گزینهٔ (۴) نیز نادرست است. اما $-۱\in A$ و $\frac{۱}{-۱}\in\mathbb{Z}$، پس گزینهٔ (۳) درست است.

۲- گزینهٔ «۲» می‌دانیم نقیض $p\wedge q$ هم‌ارز $\sim p\vee\sim q$ است و نقیض سوری وجودی (عمومی) سور عمومی (وجودی) است که قسمت گزاره‌نمای آن نقیض شده باشد، پس گزینهٔ (۲) پاسخ تست است.

۳- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $A\Rightarrow B\equiv\sim A\vee B$، پس داریم:

$$\sim p\Rightarrow(\sim q\Rightarrow r)\equiv\sim(\sim p)\vee(\sim q\Rightarrow r)$$

$$\equiv p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$$

۴- گزینهٔ «۲» می‌دانیم $A\Leftrightarrow B\equiv(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$ پس:

$$(\sim p\vee q)\Leftrightarrow q\equiv[(\sim p\vee q)\Rightarrow q]\wedge[q\Rightarrow(\sim p\vee q)]$$

حال به کمک هم‌ارزی $A\Rightarrow B\equiv\sim A\vee B$ داریم:

$$\equiv[(p\wedge\sim q)\vee q]\wedge[\underbrace{\sim q\vee(\sim p\vee q)}_{\text{همواره درست}}]\equiv(p\wedge\sim q)\vee q$$

طبق ویژگی توزیع‌پذیری داریم:

$$\equiv(p\vee q)\wedge(\sim q\vee q)\equiv(p\vee q)\wedge T\equiv p\vee q$$

۵- گزینهٔ «۳» چون $A \cap B = \{۲,۳,۴\}$ و باید $X \supseteq A \cap B$ باشد، پس حتماً مجموعهٔ X شامل عضوهای $A \cap B$ است؛ یعنی X حتماً شامل ۲، ۳ و ۴ می‌باشد. از طرفی $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و چون $X \subseteq A \cup B$، پس هر یک از دو عضو ۱ و ۵ می‌توانند در X باشند یا نباشند، مجموعهٔ $\{۱,۵\}$ دارای چهار زیرمجموعه است که اجتماع هر یک از آن‌ها با $\{۴,۳,۲\}$ می‌تواند جای مجموعهٔ X قرار بگیرد، پس چهار مجموعه می‌تواند به جای X گذاشته شود.

۶- گزینهٔ «۱»

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A')$ تعریف تفاضل

$= (A \cup B) \cap (A \cup A')$ توزیع‌پذیری $\cup$ در $\cap$

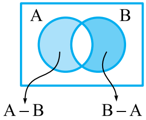
$= (A \cup B) \cap U = A \cup B$

پس بنابر فرض مسئله $A \cup B = B$ و در نتیجه $A \subseteq B$.

توجه داشته باشیم که اگر $A = \varnothing$ باشد، رابطهٔ $A \cup (B - A) = B$ برقرار است؛ پس گزینهٔ (۳) نمی‌تواند پاسخ تست باشد.

۷- گزینهٔ «۴» $(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A)$

با توجه به این‌که، $A - B$ و $B - A$ دو مجموعهٔ جدا از هم هستند، داریم: $(A - B) - (B - A) = A - B$. به شکل زیر توجه کنید:



۸- گزینهٔ «۲»

$A_۱ = (-\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۱}) = (-۱, ۱)$, $A_۲ = (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$

$A_۳ = (-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}), \dots$

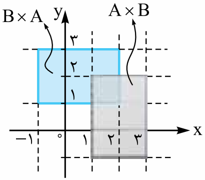
ملاحظه می‌شود همهٔ A_n ها زیرمجموعهٔ $A_۱$ هستند، پس اجتماع تمام آن‌ها برابر $A_۱$؛ یعنی برابر $(-۱,۱)$ می‌باشد.

۹- گزینهٔ «۳» چون $۸=۲^۳$، پس $A\cap B$ دارای سه عضو است در نتیجه هر یک از مجموعه‌های A و B حداقل سه عضو دارند. اما حاصل‌ضرب تعداد عضوهای آن‌ها باید ۵۴ باشد. واضح است که $۵۴=۲\times ۲۷=۳\times ۱۸=۶\times ۹$. چون A و B نمی‌توانند ۲عضوی باشند، زیرا حداقل عضوهای A و B، ۳ هستند، پس ۲ نمی‌تواند برقرار باشد، در نتیجه دو حالت باقی می‌ماند:

$$\begin{cases} n(A)=۳ \\ n(B)=۱۸ \end{cases} \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۸$$

$$\begin{cases} n(A)=۶ \\ n(B)=۹ \end{cases} \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲$$

۱۰- گزینهٔ «۱» نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ در شکل زیر رسم شده‌اند. واضح است که قسمت مشترک آن‌ها مربعی به ضلع ۱ است و در نتیجه مساحت آن ۱ می‌باشد. از طرفی مساحت $A\times B=۶$ است، پس مساحت $A\times B-B\times A$ برابر $۶-۱=۵$ می‌باشد.



فصل (۵)

چکیدهٔ نکـات
آمار و احتمال

فصل اول

- هر جملهٔ خبری را یک گزاره می‌نامند.
- ارزش یک گزاره، درست (د یا T) یا نادرست (ن یا F) است.
- اگر گزاره‌ای دارای یک یا چند متغیر باشد، آن را گزاره‌نما می‌نامند.
- مجموعهٔ مقادیری که می‌تواند جای متغیر در گزاره‌نما قرار گیرد و آن را به یک گزاره تبدیل کند، دامنهٔ متغیر نامیده می‌شود.
- بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ متغیر که گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما نامیده می‌شود.
- ارزش ترکیب عطفی دو گزاره، همیشه نادرست است مگر زمانی که هر دو گزاره درست باشند.
- ارزش ترکیب فصلی دو گزاره، همیشه درست است مگر زمانی که هر دو گزاره نادرست باشند.
- یک گزارهٔ شرطی، همیشه درست است مگر زمانی که مقدم درست و تالی نادرست باشد.
- یک گزارهٔ دوشرطی فقط زمانی درست است که ارزش هر دو مؤلفهٔ آن یکسان باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.
- هم‌ارزی‌های زیر مهم هستند:

۱ $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۲ $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

قوانین دمورگان:

۳ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۴ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

قوانین جذب:

۵ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

۶ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- ترکیب‌های فصلی و عطفی دارای ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری هستند.
- هرگاه در ابتدای گزاره‌نمایی عبارتی مانند «به ازای هر مقدار» یا «هر چه باشد» یا نظیر این‌ها بیاید، آن را به یک گزاره با سور عمومی تبدیل می‌کند.
- هرگاه در ابتدای گزاره‌نمایی عبارتی مانند «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» یا نظیر این‌ها بیاید، آن را به یک گزاره با سور وجودی تبدیل می‌کند.
- نقیض گزاره‌ای که با سور عمومی بیان شده است، گزاره‌ای با سور وجودی است که قسمت گزاره‌نمایی آن نقیض شده باشد و برعکس.
- مجموعه، یکی از مفاهیم تعریف نشده است.
- تعریف زیرمجموعه بودن: $A \subseteq B \equiv \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$
- تعریف زیرمجموعه نبودن: $A \not\subseteq B \equiv \exists x : x \in A \wedge x \notin B$
- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی، برابر با ۲^n است.
- همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A، مجموعهٔ جدیدی تشکیل می‌دهند که آن را مجموعهٔ توانی A می‌نامند و با $P(A)$ نمایش می‌دهند.
- اگر A مجموعه‌ای nعضوی باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ توانی آن ۲^n و تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ توانی برابر با $۲^{۲^n}$ است.
- اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ و برعکس.
- دو مجموعه، زمانی مساوی هستند که هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری باشد؛ به بیان دیگر: $(A = B) \equiv (A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A)$

ویژگی‌های مهم مجموعه‌ها:

۱ $A \cup A = A$ ۲ $A \cap A = A$

۳ $A \cup \varnothing = A$ ۴ $A \cap \varnothing = \varnothing$

۵ $A \cup U = U$ ۶ $A \cap U = A$

۷ $A \cup A' = U$ ۸ $A \cap A' = \varnothing$

■ قوانین جذب:

۱ $A \cup (A \cap B) = A$

۲ $A \cap (A \cup B) = A$

■ قوانین دمورگان:

۱ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۲ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

■ اجتماع و اشتراک در مجموعه‌ها دارای ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری هستند.

■ ضرب دکارتی دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، آن‌گاه $A \times B$ تمام زوج‌های مرتبی هستند که عنصر اول آن‌ها عضو مجموعهٔ A و عنصر دوم آن‌ها عضو مجموعهٔ B است.

■ ضرب دو مجموعه در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی اگر A و B دو مجموعه باشند، در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$.

■ اگر مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای p عضو باشد، آن‌گاه $A \times B$ و $B \times A$ دارای $n.p$ عضو هستند و اگر $A \cap B$ دارای k عضو باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $B \times A$ و $A \times B$ دارای k^2 عضو مشترک هستند. هم‌چنین مجموعهٔ $(A \times B) \cup (B \times A)$ دارای $2np - k^2$ عضو است.

فصل دوم

■ اصل شمارش: اگر عملی را بتوان به n_1 طریق و عمل دیگری را بتوان به n_2 طریق انجام داد، چنان‌چه انجام این دو عمل با هم امکان‌پذیر باشد، تعداد روش‌های انجام آن‌ها $n_1 \times n_2$ است.